DURÉE : 4 heures

On désigne par $\mathscr{K}$ l'ensemble des compacts non vides de $\mathbb{C}$. Si K appartient à $\mathscr{K}$, on pose

$$d_K(z) = \inf_{\zeta \in K} |z - \zeta|$$

Une fonction T d'un espace métrique (X, d) dans lui-même est dite λ-contractante si

$$\lambda \in]0, 1[\quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in X \times X \qquad d(T(x), T(y)) \leq \lambda\, d(x, y)$$

On appellera similitude une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$z \mapsto az + b$$

(avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$).

I

1.*a.* Montrer que, si K appartient à $\mathscr{K}$, la fonction d_K vérifie

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad |d_K(z_1) - d_K(z_2)| \leq |z_1 - z_2|$$

b. Montrer que, si K_1 et K_2 appartiennent à $\mathscr{K}$, la fonction $z \mapsto d_{K_1}(z) - d_{K_2}(z)$ est bornée sur $\mathbb{C}$ et $K_1 \subset K_2 \Leftrightarrow d_{K_1} \geq d_{K_2}$

2. On pose, pour K_1 et K_2 dans $\mathscr{K}$, $\delta(K_1, K_2) = \sup_{z \in \mathbb{C}} |d_{K_1}(z) - d_{K_2}(z)|$

Montrer que δ définit une distance sur $\mathscr{K}$.

3. On considère $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour δ.

a. Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est une partie bornée de $\mathbb{C}$.

b. Montrer que la suite $(d_{K_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{C}$ vers une fonction φ.

On pose $K = \{w \in \mathbb{C};\ \varphi(w) = 0\}$.

Montrer que $K \in \mathscr{K}$, puis que $\varphi = d_K$.

Déduire de ce qui précède que $(\mathscr{K}, \delta)$ est un espace métrique complet.

4.*a.* Montrer

$$\forall (K_1, K_2) \in \mathscr{K} \times \mathscr{K}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad d_{K_1}(z) - d_{K_2}(z) \leq \sup_{\zeta \in K_2} d_{K_1}(\zeta)$$

En déduire

$$\forall (K_1, K_2) \in \mathscr{K} \times \mathscr{K} \quad \delta(K_1, K_2) = \sup\left(\sup_{z_1 \in K_1} d_{K_2}(z_1), \sup_{z_2 \in K_2} d_{K_1}(z_2) \right)$$

b. Montrer

$$\forall A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{K} \quad \delta\left[\bigcup_{j=1}^{n} A_j, \bigcup_{j=1}^{n} B_j \right] \leq \sup_{1 \leq j \leq n} \delta(A_j, B_j)$$

c. Soit $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction λ-contractante. Montrer que la fonction induite par F sur $\mathscr{K}$ (définie par $K \mapsto F(K)$) est également λ-contractante.

5.*a.* Soient $T_1, \ldots, T_n$ des fonctions λ-contractantes de $\mathbb{C}$.

On définit $T : \mathscr{K} \to \mathscr{K}$ par

$$T(K) = \bigcup_{j=1}^{n} T_j(K)$$

Montrer qu'il existe un unique compact $K = K(T_1, \ldots, T_n)$ tel que

$$T(K) = K$$

b. Déterminer K si $n = 1$.

c. Soit $K = \{x + iy;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Déterminer un entier p et des contractions $T_1, \ldots, T_p$ telles que

$$K = K(T_1, \ldots, T_p)$$

Tournez la page S. V. P.

Pour α appartenant à $[1/4, 1/2]$, on désigne par a_j, $0 \le j \le 4$, les éléments de C définis par

$$a_0 = 0 \quad a_1 = \alpha \quad a_2 = \frac{1}{2} + i\sqrt{\alpha - \frac{1}{4}} \quad a_3 = 1 - \alpha \quad a_4 = 1$$

On remarquera que $|a_j - a_{j+1}| = \alpha$ pour $0 \le j \le 3$.

1. Pour $0 \le j \le 3$, on considère S_j^α la similitude qui envoie a_0 sur a_j et a_4 sur a_{j+1}.

a. Montrer qu'il existe un unique élément K_α de $\mathscr{K}$ tel que $K_\alpha = \bigcup_{j=0}^{3} S_j^\alpha(K_\alpha)$

b. Déterminer $K_{1/4}$ et $K_{1/2}$.

c. On pose $K^0 = \{x + iy; 0 \le x \le 1 \text{ et } y = 0\}$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad K^{n+1} = \bigcup_{j=0}^{3} S_j^{1/3}(K^n)$$

Dessiner K^0, K^1, K^2, K^3. Calculer $\delta(K^1, K^0)$.

Donner une majoration de $\delta(K^n, K_{1/3})$ en fonction de n.

2.*a.* Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans C telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, muni de la métrique

$$d(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$$

Montrer que l'on peut définir une application U de E dans E par

$$Uf(t) = S_j^\alpha[f(4t - j)] \quad \text{si} \quad t \in \left[\frac{j}{4}, \frac{j+1}{4}\right] \quad \text{et} \quad 0 \le j \le 3$$

et qu'il existe un unique élément f_α de E tel que

$$Uf_\alpha = f_\alpha$$

b. Montrer que K_α est l'image de f_α.

On note Δ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls des points a_0, a_2, a_4 et $\tilde{\Delta}$ le complémentaire de $\{a_4\}$ dans Δ.

1.*a.* Décrire soigneusement $S_j^\alpha(\Delta)$ pour $0 \le j \le 3$ et en déduire :

i. $S_j^\alpha(\Delta) \subset \Delta$ et $S_j^\alpha(\tilde{\Delta}) \subset \tilde{\Delta}$ pour $0 \le j \le 3$

ii. $(a \in \Delta \text{ et } S_j^\alpha(a) = 1) \Leftrightarrow (j = 3 \text{ et } a = 1)$

b. Montrer $f_\alpha([0, 1]) \subset \Delta$

c. Soit $t \in [0, 1]$. On suppose $f_\alpha(t) = 1$.

Montrer alors $\forall n \in \mathbb{N}, \ t \in \left[\frac{4^n - 1}{4^n}, 1\right]$ et $f_\alpha(4^n t - 4^n + 1) = 1$

et en déduire $t = 1$

d. Si $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ et $k \in \{0, 1, \ldots, 4^n - 1\}$ on définit $I_n^k = \left[\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}\right[$

et on désigne par $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ l'unique famille d'éléments de $\{0, 1, 2, 3\}$ telle que

$$k = k_0 + 4k_1 + \ldots + 4^{n-1}k_{n-1}$$

Montrer $f_\alpha(I_n^k) \subset S_{k_{n-1}}^\alpha \circ \ldots \circ S_{k_0}^\alpha(\tilde{\Delta})$

2. On suppose ici $\alpha \in [1/4, 1/2[$.

Montrer que, si $j \neq \ell$, $S_j^\alpha(\tilde{\Delta}) \cap S_\ell^\alpha(\tilde{\Delta}) = \varnothing$

En déduire que f_α est injective.

3. On revient au cas général $(1/4 \le \alpha \le 1/2)$.

Montrer que, si $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$, $t_1 \neq t_2$, et si n est le plus petit entier tel que $|t_1 - t_2| > 4^{-n-1}$ alors $|f_\alpha(t_1) - f_\alpha(t_2)| \le 2\alpha^n$

Tournez la page S.V.P.

page 100 E.N.S.E.T. Section A1 1988

En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2 \quad \forall \alpha \in [1/4, 1/2]$$

$$|f_\alpha(t_1) - f_\alpha(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^\beta$$

avec $$\beta = \frac{\text{Log}(1/\alpha)}{\text{Log}(4)}.$$

IV

Montrer que les applications $\alpha \mapsto K_\alpha$ et $\alpha \mapsto f_\alpha$ sont continues de $[1/4, 1/2]$ dans $\mathcal{K}$ et E respectivement.

(On pourra énoncer et démontrer un résultat général concernant les familles de contractions d'un espace complet qui implique ces deux résultats).

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail